Aula 7

Propriedades: Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um conjunto aberto, $\mathbf{F}, \mathbf{G} : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ campos vetoriais de classe $C^2(\Omega)$, $f : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ um campo escalar de classe $C^2(\Omega)$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ constantes arbitrárias.
Então tem-se:

i) $\mathrm{rot}\,(\alpha\mathbf{F} + \beta\mathbf{G}) = \alpha\,\mathrm{rot}\,\mathbf{F} + \beta\,\mathrm{rot}\,\mathbf{G}$ (linearidade).

ii) $\mathrm{rot}\,(f\mathbf{F}) = f\,\mathrm{rot}\,\mathbf{F} + \nabla f \times \mathbf{F}$.

iii) $\mathrm{rot}(\nabla f) = 0$.

iv) $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\,\mathbf{F}) = 0$.

Teorema da Divergência

(ou de Gauss-Ostrogradsky)

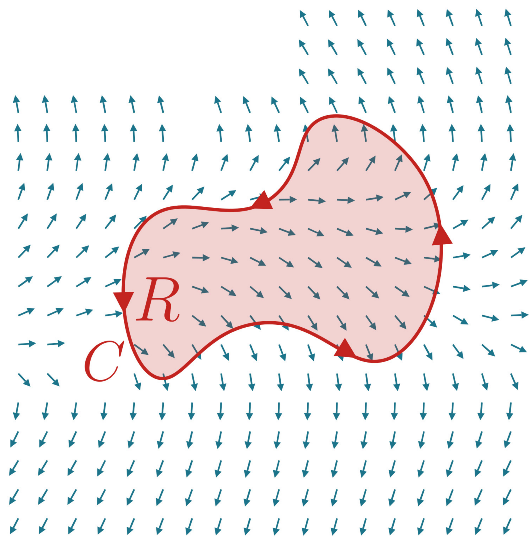
Teorema: Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e limitado, com uma fronteira $\partial\Omega$ seccionalmente constituída por uma variedade diferenciável de dimensão $n-1$ (variedade com cantos).
Seja $\mathbf{F} : \overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\mathbf{F} = (F_1, F_2, \ldots, F_n)$, um campo vetorial de classe pelo menos C^1. Então, tem-se

$$\int_\Omega \operatorname{div} \mathbf{F} dV_n = \int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \nu \, dV_{n-1},$$

em que ν é a normal unitária exterior à fronteira de Ω.

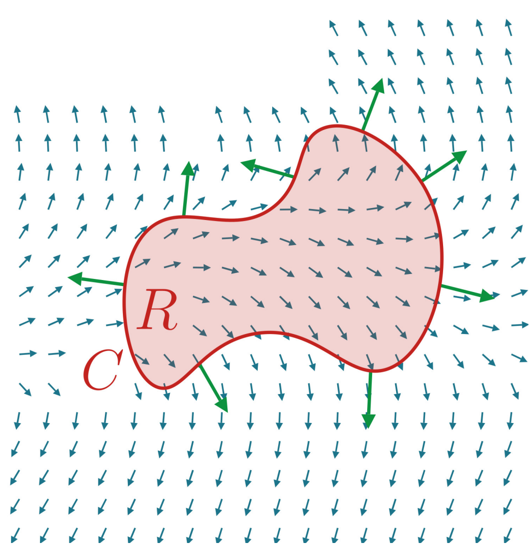
Teorema de Green e Teorema da Divergência em $\mathbb{R}^2$

$$\iint_R \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy = \oint_C (P, Q) \cdot d\alpha$$



$$\Updownarrow$$

$$\iint_R \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\, dx\, dy = \oint_C (P, Q) \cdot \nu\, ds$$



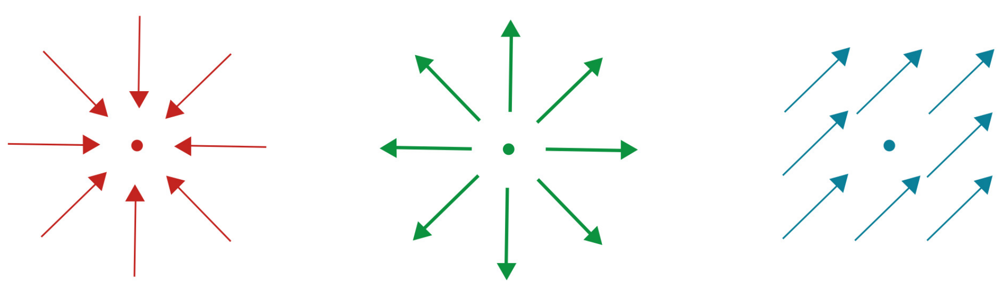
Significado da Divergência

Proposição: Seja $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ um campo vetorial de classe $C^1(\mathbb{R}^n)$. Então

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\mathrm{Vol}_n(B_\varepsilon(x))} \int_{S_\varepsilon(x)} \mathbf{F} \cdot \nu \, dS,$$

em que $B_\varepsilon(x)$ é a bola de raio ε centrada em x e $S_\varepsilon(x) = \partial B_\varepsilon(x)$ a correspondente esfera que constitui a sua fronteira.

$\operatorname{div} \mathbf{F} < 0$ $\quad$ $\operatorname{div} \mathbf{F} > 0$ $\quad$ $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$



Variedades com Bordo

Definição: Diz-se que $M \subset \mathbb{R}^n$ é uma **variedade diferenciável de dimensão** $m < n$ **com bordo** (mergulhada em $\mathbb{R}^n$) e de classe C^k se, para qualquer ponto $p \in M$, existe uma bola $B(p)$ centrada em p tal que o conjunto dos pontos de M na bola, ou seja o conjunto $M \cap B(p)$, pode ser descrito de uma das duas seguintes formas:

- p **interior à variedade:** Como imagem duma parametrização dada por uma função injetiva $g : B_r(0) \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ de classe $C^k(T)$, definida numa bola $B_r(0) \subset \mathbb{R}^m$, centrada na origem,

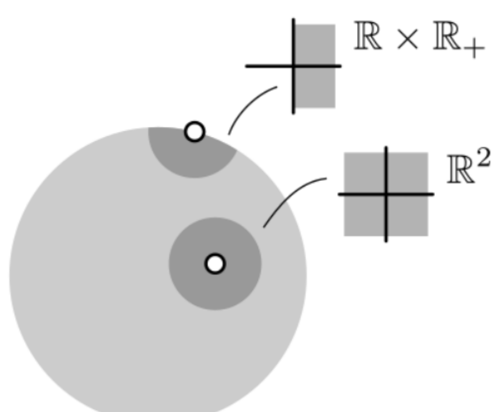
$$B_r(0) = \{(u_1, u_2, \ldots, u_m) \in \mathbb{R}^m : u_1^2 + \cdots u_m^2 < r^2\},$$

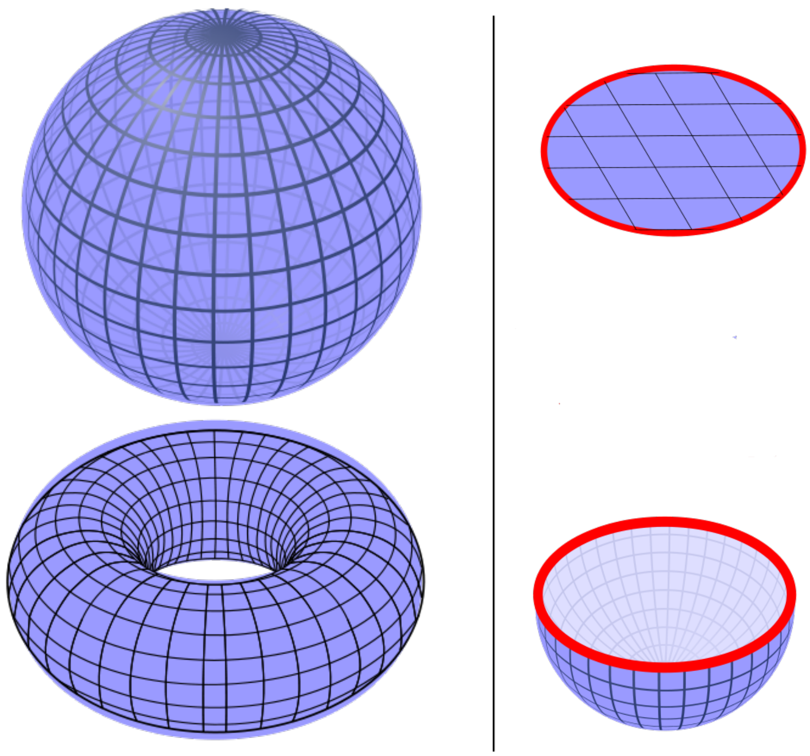
  com inversa contínua $g^{-1} : g(B_r(0)) \to B_r(0)$ e $g(0) = p$.

- p **no bordo da variedade:** Como imagem duma parametrização dada por uma função injetiva $g : B_r^+(0) \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ de classe $C^k(T)$, definida numa meia-bola $B_r^+(0) \subset \mathbb{R}^m$, centrada na origem,

$$B_r^+(0) = \{(u_1, u_2, \ldots, u_m) \in \mathbb{R}^m : u_1^2 + \cdots u_m^2 < r^2\} \cap \{u^1 \geq 0\},$$

  com inversa contínua $g^{-1} : g(B_r^+(0)) \to B_r^+(0)$ e $g(0) = p$.





Sem Bordo vs Com Bordo

Proposição: O conjunto dos pontos interiores duma variedade com bordo de dimensão m formam uma variedade sem bordo de dimensão m.
O conjunto dos pontos do bordo de uma variedade com bordo de dimensão m formam uma variedade sem bordo de dimensão $m-1$.

Teorema de Stokes

Teorema: Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície, isto é, uma variedade de dimensão 2, limitada, orientável e com bordo ∂S seccionalmente regular.
Seja $\mathbf{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um campo vetorial de classe pelo menos C^1 no aberto Ω, com $S \cup \partial S \subset \Omega$. Então, tem-se

$$\int_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \nu dS = \oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\gamma,$$

em que γ é um caminho que percorre ∂S com orientação compatível com a de ν (regra da mão direita).